Semana 18

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 1 a 7 de la Guía 6. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Formas cuadráticas

Un forma cuadrática es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que se puede expresar de la forma

$$Q(x) = x^T Ax \text{ con } A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ (simétrica)}.$$

Observar que si Q es una forma cuadrática y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$Q(\alpha x) = (\alpha x)^T A(\alpha x) = \alpha\alpha x^T Ax = \alpha^2 Q(x).$$

Sea $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no necesariamente simétrica y $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$Q(x) = x^T Bx.$$

Entonces, como $Q(x) \in \mathbb{R}$, tenemos que $Q(x)^T = Q(x)$. Entonces

$$2Q(x) = Q(x) + Q(x) = Q(x) + Q(x)^T = x^T Bx + (x^T Bx)^T = x^T Bx + x^T B^T x = x^T (B + B^T)x.$$

Por lo tanto

$$Q(x) = \frac{x^T (B + B^T)x}{2} = x^T \frac{(B + B^T)}{2} x.$$

En este caso, la matriz $\frac{B+B^T}{2}$ es simétrica, pues $(\frac{B+B^T}{2})^T = \frac{B^T+B}{2} = \frac{B+B^T}{2}$. Entonces, a la función $Q(x) = x^T Bx$ con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la pudimos expresar de la forma $Q(x) = x^T Ax$ con $A := \frac{B+B^T}{2}$ simétrica.

Ejercicio 1a): Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + 10x_1x_2 + 16x_2x_3 + 26x_1x_2.$$

Comprobar que Q es una forma cuadrática y expresarla de la forma $Q(x) = x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica.

Dem. Observar que $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + 10x_1x_2 + 16x_2x_3 + 26x_1x_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 36x_1x_2 + 16x_2x_3 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2(18x_1x_2 + 8x_2x_3)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es tal que $A = A^T$. Entonces A tiene la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix},$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Si $Q(x) = x^T Ax$, entonces

$$\begin{aligned} Q(x) = x^T Ax = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ = ax_1^2 + dx_2^2 + fx_3^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 + 2ex_2x_3. \end{aligned}$$

Entonces $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2(18x_1x_2 + 8x_2x_3) = ax_1^2 + dx_2^2 + fx_3^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 + 2ex_2x_3$. Comparando, nos queda que $a = 1, d = 2, f = 3, b = 18, c = 0, e = 8$. Entonces,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 0 \\ 18 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

y tenemos que $Q(x) = x^T Ax$. □

Ejercicio: Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x.$$

Comprobar que Q es una forma cuadrática y expresarla de la forma $Q(x) = x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica.

Dem. La matriz $B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ no es simétrica. Sin embargo, arriba vimos que si tomamos

$$A = \frac{B + B^T}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

entonces $Q(x) = x^T Ax$ y en este caso A resulta simétrica y Q es una forma cuadrática. □

Eliminación de productos cruzados

Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T Ax$ con $A = A^T$. Como A es simétrica, vimos que existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal (cuyas columnas son autovectores de A que forman una bon de $\mathbb{R}^n$) y $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ con $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los autovalores de A tales que:

$$A = P\Lambda P^T.$$

Con el objetivo de eliminar los términos cruzados de la forma $x_i x_j$ con $i \neq j$, vamos a considerar el cambio de variables

$$x = Py.$$

Entonces

$$Q(x) = x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = y^T \Lambda y =: \tilde{Q}(y).$$

Por lo tanto

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Ejercicio 3c) : Expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = x_3^2 + x_1 x_2$$

como $x^T A x$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ expresar Q sin productos cruzados.

Dem. Tal como hicimos en el **Ejercicio 1**, podemos ver que

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

con $A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ simétrica.

Para diagonalizar ortogonalmente A, calculemos su polinomio característico, sus autovalores y obtengamos una bon de autovectores de $\mathbb{R}^3$. De hecho,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \frac{1}{4}).$$

Entonces, los autovalores de A son $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = 1$. Como

$$nul(A + \frac{1}{2}I) = nul(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\},$$

$$nul(A - \frac{1}{2}I) = nul(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\},$$

$$nul(A - I) = nul(\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Tenemos que $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ es una bon de autovectores de $\mathbb{R}^3$. Tomemos,

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A = P \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^T.$$

Como vimos arriba, si hacemos el cambio de variables $x = Py$, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}y = y^T \Lambda y = -\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2.$$

□

Clasificación de formas cuadráticas y conjuntos de nivel

Dada una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ decimos que:

- Q es *definida positiva* si $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Q es *semidefinida positiva* si $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Q es *definida negativa* si $Q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Q es *semidefinida negativa* si $Q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Q es *indefinida* si no es ninguna de las anteriores. Es decir, existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(x_1) > 0$ y $Q(x_2) < 0$.

Si expresamos la forma cuadrática

$$Q(x) = x^T Ax$$

con A simétrica, entonces recordando lo que vimos al principio de la **Semana 17** tenemos que:

Proposición 1. *Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ donde $Q(x) = x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los autovalores de A. Entonces:*

- *Q es definida positiva si y sólo si A es definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *Q es semidefinida positiva si y sólo si A es semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*

- *Q es definida negativa si y sólo si A es definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *Q es semidefinida negativa si y sólo si A es semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *Q es indefinida si y sólo si A es indefinida si y sólo A tiene algún autovalor negativo y algún autovalor positivo.*

Submatrices principales y un criterio para determinar si una matriz es definida positiva

A continuación, veamos otro criterio para determinar si una matriz es definida positiva, definida negativa o indefinida. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Denotaremos $A^{(k)}$ a la *submatriz principal* de $\mathbb{R}^{k\times k}$ que se obtiene a partir de la esquina superior izquierda de A, es decir

$$A^{(k)} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Por ejemplo $A^{(1)} = [a_{11}]$, $A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $A^{(n)} = A$.

Recordemos que si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son los autovalores de A, tenemos que

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Por lo tanto,

- Si A es definida positiva, como todos sus autovalores son positivos, tendremos que $\det(A) > 0$.
- Si A es definida negativa, como todos sus autovalores son negativos, tendremos que todos los autovalores de $-A$ son positivos y entonces $-A$ es definida positiva y por lo tanto, $\det(-A) > 0$.
- Si A es semidefinida, como algún autovalor es nulo, tendremos que $\det(A) = 0$.
- Si A es indefinida, no podemos decir nada del $\det(A)$.

El siguiente teorema nos provee de otro criterio para determinar si una matriz es definida positiva, definida negativa o indefinida:

Teorema 1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces:*

1. *A es definida positiva si y sólo si $\det(A^{(k)}) > 0$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$. Es decir, el determinante de todas las submatrices principales de A es positivo.*

2. *A es definida negativa si y sólo si $(-1)^k \det(A^{(k)}) > 0$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$. Es decir, el determinante de todas las submatrices principales de A van alternándose entre negativos y positivos: $\det(A^{(1)}) < 0$, $\det(A^{(2)}) > 0$, etc.*

3. *A es indefinida si existe $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $\det(A^{(k)})$ rompe el patrón. Es decir, si por ejemplo, $\det(A^{(1)}) > 0, \cdots, \det(A^{(k-1)}) > 0$ y luego tenemos que $\det(A^{(k)}) < 0$.*

Dem. 1 : Lo vamos a probar por inducción en n.

Si $n = 1$, entonces $A = [a_{11}]$ es definida positiva si y sólo si $a_{11} > 0$ si y sólo si $\det([a_{11}]) = a_{11} > 0$ y en este caso es válido el teorema.

Hipótesis inductiva (HI): supongamos que el teorema vale para $n-1$, es decir: $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es definida positiva si y sólo si $\det(A^{(k)}) > 0$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Veamos que entonces, el teorema vale para todo n.

Primero veamos que, por HI, A sólo puede tener como mucho un autovalor negativo. Supongamos que no, es decir, supogamos que A tiene dos autovalores negativos. Entoces, como A es simétrica, existen dos autovectores $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ asociados a dichos autovalores negativos, que son ortogonales entre sí, es decir $\langle u, v \rangle = u^T v = v^T u = 0$.

Sea

$$w := v_n u - u_n v \neq 0.$$

Entonces

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n u_1 - u_n v_1 \\ \vdots \\ v_n u_n - u_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n u_1 - u_n v_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces $w_n = 0$. Por lo tanto (comprobarlo haciendo la cuenta):

$$\langle Aw, w \rangle = \left\langle A^{(n-1)} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} \right\rangle > 0$$

donde usamos que, por HI, $A^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es definida positiva. Por otra parte (verificarlo haciendo la cuenta y recordando que $u^T v = v^T u = 0$):

$$\langle Aw, w \rangle = (v_n u - u_n v)^T A (v_n u - u_n v) = v_n^2 (u^T A u) + u_n^2 (v^T A v) = v_n^2 \langle Au, u \rangle + u_n^2 \langle Av, v \rangle < 0,$$

pues u y v eran autovectores asociados a autovalores negativos.

Entonces $\langle Aw, w \rangle > 0$ y $\langle Aw, w \rangle < 0$, lo cual es absurdo. Entonces, A tiene a lo sumo 1 único autovalor negativo. Pero eso tampoco puede pasar. Supongamos que A tiene un autovalor negativo, entoces $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n < 0$ pues tendríamos el producto de $n-1$ autovalores positivos y uno negativo. Pero estamos suponiendo que $\det(A) = \det(A^{(n)}) > 0$, entonces tenemos otra contradicción. Tampoco A puede tener algún autovalor nulo porque en ese caso, obtendríamos que $\det(A) = 0$ y estamos suponiendo que $\det(A) > 0$. Por lo tanto, A tiene todos sus autovalores positivos. Entonces, probamos por inducción que A es definida positiva.

Recíprocamente, si A es definida positiva, tenemos que $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y tomemos $x^{(k)} := [x_1\ x_2\ \cdots\ x_k]^T$, es decir $x^{(k)}$ es el vector de $\mathbb{R}^k$ igual a x hasta la componente k. Entonces

$$\left\langle A^{(k)} x^{(k)}, x^{(k)} \right\rangle = \left\langle A[x_1\ x_2\ \cdots\ x_k\ 0\ \cdots\ 0]^T, [x_1\ x_2\ \cdots\ x_k\ 0\ \cdots\ 0]^T \right\rangle > 0$$

para todo $x^{(k)} \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ y todo $k = 1, 2, \cdots, n$. Entonces, $A^{(k)}$ es definida positiva para todo $k = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto, $\det(A^{(k)}) > 0$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$ y probamos lo que queríamos.

2. : Esta condición se prueba aplicando el item 1 a la matriz $-A$ (A es definida negativa si y sólo si $-A$ es definida positiva) y recordando que

$$\det((-A)^{(k)}) = \det(-A^{(k)}) = (-1)^k \det(A^{(k)}),$$

pues $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times k}$.

3. : Recordando el paso inductivo en el item 1 vimos que, si por ejemplo,

$$\det(A^{(1)}) > 0, \cdots, \det(A^{(k-1)}) > 0$$

entonces $A^{(k)}$ tiene sólo un autovalor negativo. Por ende, $A^{(k)}$ es indefinida (tiene $k-1$ autovalores positivos y uno negativo) y entonces A también es indefinida. $\square$

Observar que si existe algún $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $\det(A^{(k)}) = 0$ el Teorema 1 es inconcluso.

Conjuntos de nivel

Dada una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $c \in \mathbb{R}$ se define el *conjunto de nivel* c como

$$\mathcal{N}_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = c\}.$$

Si $Q(x) = x^T A x$ con $A = A^T$ y diagonalizamos ortgonalmente a A de la forma $A = P \Lambda P^T$, resulta más simple determinar qué tipo de conjunto es $\mathcal{N}_c(Q)$ empleando el cambio de variables $x = Py$. En ese caso, tendremos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T \Lambda y$$

con Λ diagonal. Para $c \in \mathbb{R}$ dado, tenemos que

$$Q(x) = c \text{ si y sólo si } \tilde{Q}(y) = c.$$

Veremos a continuación que el conjunto de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$ se obtiene rotando el conjunto de nivel $\mathcal{N}_c(\tilde{Q})$ en los ejes principales de A (determinados por las columnas ortonormales de la matriz P). En particular, ambos conjuntos de nivel tienen la misma forma geométrica.

Ejercicio 4 a): Sea $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$ en $\mathbb{R}^2$. Clasificar dicha forma cuadrática y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$.

Dem. Tal como hicimos en los ejercicios anteriores, tenemos que

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} x.$$

Entonces si $A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, tenemos que $Q(x) = x^T Ax$ con A simétrica.

Ahora, diagonalizemos ortogonalmente A. Para eso, calculemos su polinomio característico, sus autovalores y obtengamos una bon de autovectores de $\mathbb{R}^2$. De hecho,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (9 - \lambda)(3 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 11.$$

Entonces, los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$. Los autoespacios asociados son:

$$nul(A - 1I) = nul(\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\},$$

$$nul(A - 11I) = nul(\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Entonces $\{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ es una bon de $\mathbb{R}^2$. Si tomamos

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} P^T.$$

Entonces, como los autovalores de A son ambos positivos, tenemos que A es **definida positiva** y por lo tanto Q es **definida positiva**.

Por otra parte, con el cambio de variables $x = Py$, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = 1y_1^2 + 11y_2^2.$$

Por lo tanto, dado $c \in \mathbb{R}$ tenemos que las conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$ son todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 = c.$$

Veamos 3 casos posibles:

- Si $c < 0$, como Q es definida positiva, entonces

$$\mathcal{N}_c(Q) = \emptyset.$$

- Si $c = 0$, como Q es definida positiva, entonces

$$\mathcal{N}_c(Q) = \{0, 0\}.$$

- Si $c > 0$. Como $Q(x) = c$ si y sólo si $\tilde{Q}(y) = c$, se sigue que $x \in \mathcal{N}_c(Q)$ si y sólo si $y = [y_1\ y_2]^T \in \mathbb{R}^2$ cumple que

$$\tilde{Q}(y) = y_1^2 + 11y_2^2 = c,$$

  ó equivalentemente ($c > 0$),

$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{\frac{c}{11}})^2} = 1.$$

Entonces, los conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 = c\}$ ($c > 0$) son elipses en $\mathbb{R}^2$ en los nuevos ejes y_1, y_2 determinados por los versores $v_1 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ que son las columnas de P y que son una rotación de un ángulo (positivo) de los ejes originales x_1, x_2 (ver Figura 1). $\square$

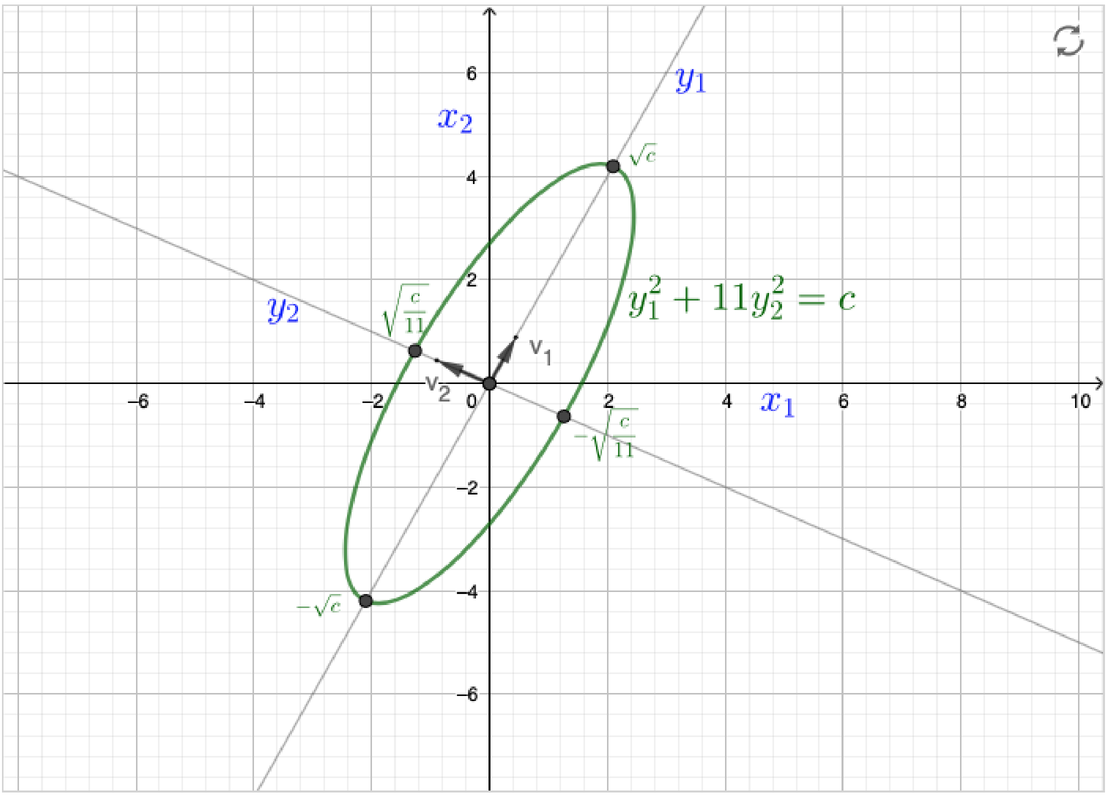

Figura 1: Ejercicio 4a)

Ejercicio 6: Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si A es definida positiva.

Recordemos que A es definida positiva si A es simétrica, es decir $A = A^T$ y $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Dem. Recordemos que, como el producto interno canónico es lineal en la primera variable, para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la función

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

es lineal en la primera variable. De hecho,

$$\begin{aligned}\langle x+z, y \rangle_A &= \langle A(x+z), y \rangle = \langle Ax + Az, y \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle Az, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle_A + \langle z, y \rangle_A \text{ para todo } x, y, z \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Y también tenemos que

$$\langle \alpha x, y \rangle_A = \langle A(\alpha x), y \rangle = \langle \alpha Ax, y \rangle = \alpha \langle Ax, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle_A \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Veamos entonces, que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ define un producto interno si y sólo si A es definida positiva.

Supongamos que A es definida positiva, entonces por un lado tenemos que $A = A^T$ y usando que el producto interno canónico es simétrico, tenemos que

$$\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle Ay, x \rangle = \langle y, x \rangle_A .$$

Entonces, $\langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Finalmente, como A es definida positiva tenemos también que

$$\langle x, x \rangle_A = \langle Ax, x \rangle > 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$

Entonces, como la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ es lineal en la primera variable, simétrica y cumple que $\langle x, x \rangle_A > 0$ para todo $x \neq 0$, concluimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, supongamos que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$. Entonces, en particular, tenemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale que $\langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$. Por lo tanto, usando que el producto interno canónico es simétrico, se sigue que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A = \langle Ay, x \rangle = \langle x, Ay \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Recordemos que siempre vale que $\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle$. Entoces, usando la ecuación (1), tenemos que

$$\left\langle x, A^T y \right\rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle ,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces, usando la linealidad del producto interno canónico, tenemos que

$$\left\langle x, (A^T - A)y \right\rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle - \langle x, Ay \rangle = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, tomando $x := (A^T - A)y$, tenemos que

$$\langle (A^T - A)y, (A^T - A)y \rangle = \|(A^T - A)y\|^2 = 0,$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como $\|\cdot\|$ es la norma inducida del producto interno canónico, se sigue que

$$(A^T - A)y = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

Es decir, $A^T y = Ay$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces concluimos que $A^T = A$ y A es simétrica.

Finalmente, como $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$, vale que

$$\langle x, x \rangle_A = \langle Ax, x \rangle > 0$$

para todo $x \neq 0$. Entonces, como A es simétrica y $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$, concluimos que A es definida positiva. $\square$

El siguiente ejercicio es similar al **Ejercicio 5**.

Ejercicio de examen: Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ (si existen) para los cuales la forma cuadrática definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$Q(x) = x_1^2 + kx_1x_2 + x_2^2,$$

es definida positiva.

Dem. Observar que

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 \end{bmatrix} x.$$

Sea $A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 \end{bmatrix}$. Entonces, claramente $A^T = A$. Por la Proposición 1, Q es definida positiva si y sólo si A es definida positiva, si y sólo si los autovalores de A son positivos.

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - \frac{k^2}{4}.$$

Entonces, los autovalores de A son

$$\lambda_1 = 1 + \frac{|k|}{2} > 0 \text{ y } \lambda_2 = 1 - \frac{|k|}{2}.$$

Claramente λ_1 es positivo para cualquier valor de k y queremos también que $\lambda_2 > 0$. Entonces, $|k| < 2$. Por lo tanto, A es definida positiva si y sólo $|k| < 2$ ó, equivalentemente, si $-2 < k < 2$.

También podemos resolver este ejercicio usando el Teorema 1. Dicho teorema afirma que A es definida positiva si y sólo si el determinate de todas sus submatrices principales es positivo.

En este caso, tenemos dos submatrices principales: $A^{(1)} = [1]$ cuyo determinante es $\det(A^{(1)}) = 1 > 0$ y $A^{(2)} = A$ cuyo determinante es $\det(A^{(1)}) = \det(A) = 1 - \frac{k^2}{4}$. Si imponemos que $1 - \frac{k^2}{4} > 0$, entonces, $k^2 < 4$ y, tomando raíz, nos queda que $|k| < 2$, ó equivalentemente, $-2 < k < 2$ y llegamos al mismo resultado. $\square$

Ejercicio 7 : Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por $\langle x, y \rangle_A := y^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\theta \in (0, \pi)$.

a) Observar que $Q_A(x) = \langle x, x \rangle_A$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonal con $\det(P) = 1$ tal que el cambio de variables $x = Py$ transforme Q_A en una forma cuadrática sin productos cruzados.

c) Determinar los ejes principales de la forma cuadrática Q_A.

d) Graficar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q_A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Q_A(x) = 1\}$.

e) Determinar cómo son los conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q_A)$ con $c > 0$.

Dem. *a)* : Observar en primer lugar que $A^T = A$. Además, observar que $\mathrm{tr}(A) = 2 > 0$ y $\det(A) = 1 - \cos\theta^2 = \sin\theta^2 > 0$. Entonces si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son los autovalores de A,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) > 0 \text{ y } \lambda_1\lambda_2 = \det(A) > 0$$

y deducimos que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Por lo tanto, A es simétrica y sus autovalores son positivos. Entonces, por la Proposición 1, A es definida positiva. Conclusión: por el **Ejercicio 6**, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ efectivamente resulta un producto interno y Q_A es una forma cuadrática definida positiva.

b) : Usando que $\mathrm{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = \sin\theta^2$, por el **Ejercicio 4.2** (o haciendo la cuenta), tenemos que el polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 2\lambda + \sin\theta^2.$$

Entonces, como

$$d := \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 4 - 4\sin\theta^2 = 4(1 - \sin\theta^2) = 4\cos\theta^2 > 0.$$

Por el **Ejercicio 4.2** (o haciendo la cuenta), tenemos que los autovalores de A son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{d}\big).$$

Es decir:

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{d}}{2} = \frac{2 + 2\cos\theta}{2} = 1 + \cos\theta \text{ y } \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{d}}{2} = 1 - \cos\theta.$$

Por lo tanto, el autoespacio asociado a λ_1 es

$$nul(A - \lambda_1 I) = nul(A - (1 + \cos\theta)I) = nul(\begin{bmatrix} -\cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

De la misma manera, el autoespacio asociado a λ_2 es

$$nul(A-\lambda_2 I) = nul(A-(1-\cos\theta)I) = nul(\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \cos\theta \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Entonces

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

es una bon de $\mathbb{R}^2$. Tomamos

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Claramente $\det(P) = 1$ y

$$A = P\begin{bmatrix} 1+\cos\theta & 0 \\ 0 & 1-\cos\theta \end{bmatrix} P^T.$$

$c)$: Los ejes principales de la forma cuadrática Q_A son los vectores unitarios de la bon de $\mathbb{R}^2$ formada por los autovectores de A:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

$d)$: Si hacemos el cambio de variables $x = Py$, con P definida en el item $b)$, usando que $A = P\begin{bmatrix} 1+\cos\theta & 0 \\ 0 & 1-\cos\theta \end{bmatrix} P^T$, tenemos que $Q(x) = 1$, si y sólo si

$$\tilde{Q}(y) = (1+\cos\theta)y_1^2 + (1-\cos\theta)y_2^2 = 1.$$

Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\tilde{Q}(y) = \frac{y_1^2}{[\frac{1}{\sqrt{(1+\cos\theta)}}]^2} + \frac{y_2^2}{[\frac{1}{\sqrt{(1-\cos\theta)}}]^2} = 1.$$

Como $\theta \in (0,\pi)$ se ve que $1+\cos\theta > 0$ y $1-\cos\theta > 0$ (y ambos autovalores son distintos excepto en el caso $\theta = \frac{\pi}{2}$). Entonces, el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2+2\cos\theta x_1x_2 = 1\}$ es una elipse en $\mathbb{R}^2$ en los nuevos ejes y_1, y_2 determinados por los versores $v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ que son las columnas de P y que son una rotación de un ángulo (positivo) de los ejes originales x_1, x_2 (ver Figura 2). Vamos a graficar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ para 3 valores distintos de θ :

- Gráfico 1: $\theta = \frac{\pi}{3}$ (color verde). En este caso, nos queda el conjunto de nivel $x_1^2+x_2^2+x_1x_2 = 1$ (en los ejes x_1, x_2) ó $\frac{y_1^2}{[\sqrt{\frac{2}{3}}]^2} + \frac{y_2^2}{[\sqrt{2}]^2} = 1$ (en los ejes y_1, y_2).

- Gráfico 2: $\theta = \frac{\pi}{2}$ (color negro). En este caso, nos queda el conjunto de nivel $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (en los ejes x_1, x_2) ó $y_1^2 + y_2^2 = 1$ (en los ejes y_1, y_2). Observar que en realidad obtenemos una circunferencia de radio 1.

- Gráfico 3: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (color azul). En este caso, nos queda el conjunto de nivel $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 1$ (en los ejes x_1, x_2) ó $\frac{y_1^2}{[\sqrt{2}]^2} + \frac{y_2^2}{[\sqrt{\frac{2}{3}}]^2} = 1$ (en los ejes y_1, y_2).

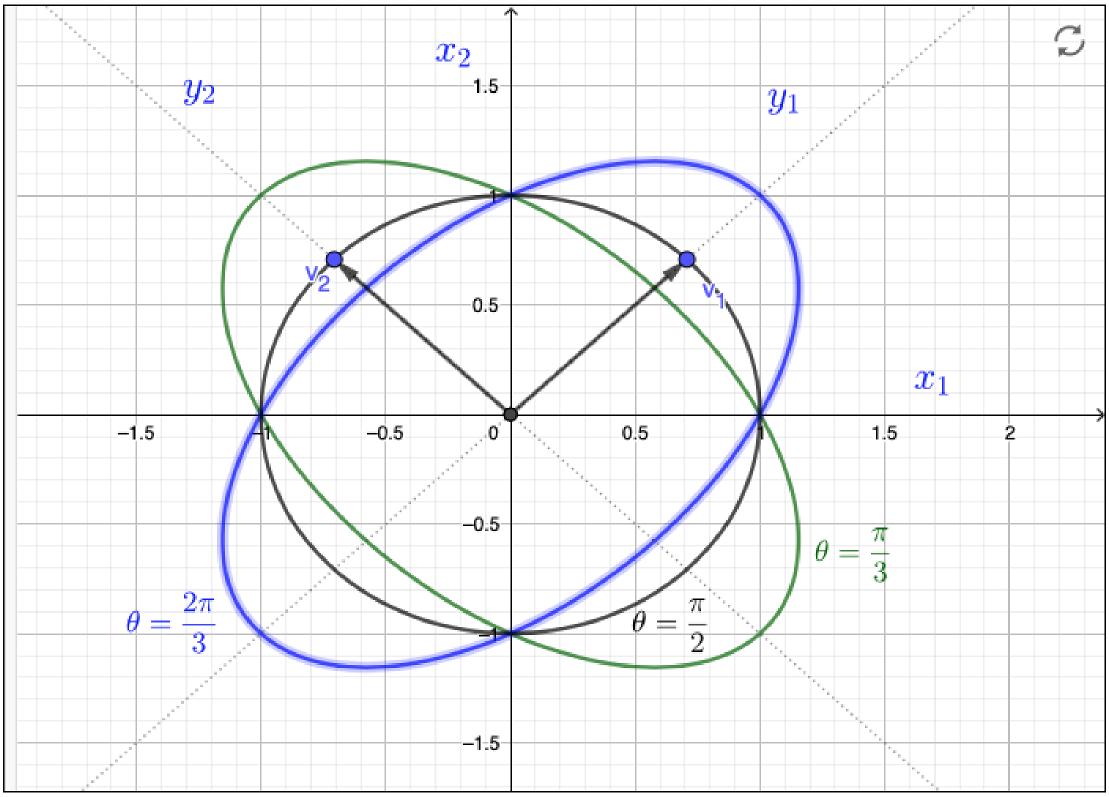

Figura 2: Ejercicio 7d)

e) : De la misma manera que hicismo en el item d, tenemos que $Q(x) = c$, si y sólo si

$$\tilde{Q}(y) = (1 + \cos\theta)y_1^2 + (1 - \cos\theta)y_2^2 = c.$$

Usando que $c > 0$ podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\tilde{Q}(y) = \frac{y_1^2}{[\sqrt{\frac{c}{(1+\cos\theta)}}]^2} + \frac{y_2^2}{[\sqrt{\frac{c}{(1-\cos\theta)}}]^2} = 1.$$

Entonces, el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + 2\cos\theta x_1x_2 = c\}$ es una elipse en $\mathbb{R}^2$ en los nuevos ejes y_1, y_2 determinados por los versores $v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ que son las columnas de P y que son una rotación de un ángulo (positivo) de los ejes originales x_1, x_2. Como vimos, en el caso $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtenemos una circunferencia de radio c. $\square$